Planche n° 27. Fractions rationnelles : corrigé

Exercice n° 1

1) Soit $F = \dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2} = \dfrac{X^2+3X+5}{(X-1)(X-2)}$.

1 et 2 ne sont pas racines du polynôme X^2+3X+5 et donc F est bien sous forme irréductible. La décomposition en élément simples de F s'écrit

$$F = a + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2},$$

où a, b et c sont deux réels.

- $a = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
- $b = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)F(x) = \dfrac{1+3+5}{1-2} = -9$.
- $c = \lim\limits_{x\to 2} (x-2)F(x) = \dfrac{4+6+5}{2-1} = 15$. Donc,

$$\boxed{\frac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.}$$

2) Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. F est sous forme irréductible. La partie entière de F est nulle. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

où a, b et c sont trois réels.

- $a = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)F(x) = \dfrac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$.
- $b = \lim\limits_{x\to 2} (x-2)F(x) = \dfrac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$.
- $c = \lim\limits_{x\to 3} (x-3)F(x) = \dfrac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Donc,

$$\boxed{\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.}$$

3) Soit $F = \dfrac{1}{X(X-1)^2}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

- $a = \lim\limits_{x\to 0} xF(x) = 1$.
- $c = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2F(x) = 1$.
- Enfin, $a + b = \lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0$ et donc $b = -1$ (ou bien $x = -1$ fournit $-1 - \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$ et donc $b = -1$). Donc,

$$\boxed{\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.}$$

Autre démarche.

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{-(X-1)+X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2}\\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.\end{aligned}$$

4) Soit $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \dfrac{X^2+1}{(X^2-1)^2}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

- $b = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \dfrac{1}{2}$
- $x = 0$ fournit $-2a + 2b = 1$ et donc $a = 0$.

$$\boxed{\frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}\right).}$$

5) Soit $F = \dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3} = \dfrac{1}{(X^2-4)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

- $c = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^3F(x) = \dfrac{1}{64}$ puis,

$$\begin{aligned}
F - \frac{1}{64}\left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3}\right) &= \frac{64 - (X+2)^3 + (X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2+48}{64(X-2)^3(X+2)^3} \\
&= -\frac{3}{16}\frac{X^2-4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16}\frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2}
\end{aligned}$$

- $b = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\left(F(x) - \dfrac{1}{64}\left(\dfrac{1}{(x-2)^3} - \dfrac{1}{(x+2)^3}\right)\right) = -\dfrac{3}{16}\dfrac{1}{(2+2)^2} = -\dfrac{3}{256}$.
- Enfin, $x = 0$ fournit $-\dfrac{1}{64} = -a - \dfrac{3}{512} - \dfrac{1}{256}$ et $a = \dfrac{1}{64} - \dfrac{5}{512} = \dfrac{3}{512}$. Donc,

$$\boxed{\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{1}{512}\left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3}\right).}$$

6) Soit $F = \dfrac{X^3}{X^3-1}$. On a déjà $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)\left(X-j^2\right)$.

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{\overline{b}}{X-j^2}.$$

- $a = \dfrac{1^3}{3\times 1^2} = \dfrac{1}{3}$.
- $b = \dfrac{1^3}{3j^2} = \dfrac{j}{3}$.

La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est

$$\boxed{\frac{X^3}{X^3-1} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2}\right).}$$

Décomposition sur $\mathbb{R}$.

1ère méthode. On utilise la décomposition sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\frac{X^3}{X^3-1} &= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2}\right) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j\left(X-j^2\right) + j^2\left(X-j\right)}{(X-j)\left(X-j^2\right)}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{X^3}{X^3-1} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1}\right).}$$

2ème méthode. On trouve directement la décomposition sur $\mathbb{R}$ sans passer par $\mathbb{C}$. Puisque $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ et que le trinôme X^2+X+1 n'a pas de racine réelle, la décomposition sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}.$$

- $a = \dfrac{1^3}{3\times 1^2} = \dfrac{1}{3}$.
- $c + bj = \lim\limits_{z\to j}(z^2+z+1)F(z) = \lim\limits_{z\to j}\dfrac{z^3}{z-1} = \dfrac{j^3}{j-1} = \dfrac{j^2-1}{(j-1)(j^2-1)} = \dfrac{-1-j-1}{j^3-j-j^2+1} = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}j$.

  Puisque j n'est pas réel, on en déduit que $c = -\dfrac{2}{3}$ et $b = -\dfrac{1}{3}$ et on retrouve le résultat précédent.

7) Soit $F = \dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2\left(X-j^2\right)^2$.

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\overline{c}}{X-j^2} + \frac{\overline{d}}{(X-j^2)^2}.$$

- $b = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2F(z) = \dfrac{1^6}{(1^2+1+1)^2} = \dfrac{1}{9}$
- Ensuite

$$\begin{aligned} d &= \lim_{z\to j}(z-j)^2F(z) = \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2\left(j^2-2j+1\right)^2} \\ &= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9}. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{(j+j^2)X^2 - 2(j+j^2)X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)} \\ &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-X^2+2X+2}{(X-j)^2(X-j^2)} = \frac{(X^2+X+1)^2 + (X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2} \\ &= \frac{\left(X^4+2X^3+3X^2+2X+1\right) + \left(X^2-2X+1\right)\left(-X^2+2X+2\right)}{(X^3-1)^2} \\ &= \frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F - 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right) &= \frac{X^6}{(X^3-1)^2} - 1 - \frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{3X^6 - 3(X^3-1)^2 - 2X^3 - 1}{3(X^3-1)^2} = \frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{4}{3}\times\frac{1}{X^3-1}. \end{aligned}$$

Mais alors, $a = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{3\times 1^2} = \dfrac{4}{9}$. De même, $c = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{3j^2} = \dfrac{4j}{9}$.
Donc,

$$\boxed{\frac{X^6}{(X^3-1)^2} = 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j}{X-j} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{4j^2}{X-j^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2}\right).}$$

Décomposition sur $\mathbb{R}$. On regroupe les conjugués.

$$\begin{aligned}
F &= 1+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{4j(X-j^2)+4j^2(X-j)}{X^2+X+1}+\frac{j^2(X-j^2)^2+j(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}\right)\\
&= 1+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X-8}{X^2+X+1}+\frac{-X^2+2X+2}{(X^2+X+1)^2}\right)\\
&= 1+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{-4X-8}{X^2+X+1}+\frac{-X^2-X-1+3X+3}{(X^2+X+1)^2}\right)\\
&= 1+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{4X+9}{X^2+X+1}+\frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{X^6}{(X^3-1)^2}=1+\frac{1}{9}\left(\frac{4}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{4X+9}{X^2+X+1}+\frac{3X+3}{(X^2+X+1)^2}\right).}$$

8) Soit $F=\dfrac{1}{X^6+1}$. $F=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$ où $\omega_k=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}$. De plus, pour $k\in[\![0,5]\!]$,

$$\lambda_k=\frac{1}{6\omega_k^5}=\frac{\omega_k}{6\omega_k^6}=-\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\boxed{\frac{1}{X^6+1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{X+i}-\frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}}-\frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}}+\frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}}+\frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}}\right).}$$

Décomposition sur $\mathbb{R}$. On utilise la décomposition sur $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^6+1} &= \frac{1}{6}\left(-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{X+i}-\frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}}-\frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}}+\frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}}+\frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}}\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{X^2+1}+\frac{-e^{i\pi/6}\left(X-e^{-i\pi/6}\right)-e^{-i\pi/6}\left(X-e^{i\pi/6}\right)}{\left(X-e^{i\pi/6}\right)\left(X-e^{-i\pi/6}\right)}+\frac{e^{i\pi/6}\left(X+e^{-i\pi/6}\right)+e^{-i\pi/6}\left(X+e^{i\pi/6}\right)}{\left(X+e^{i\pi/6}\right)\left(X+e^{-i\pi/6}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{X^2+1}+\frac{-\sqrt{3}X+2}{X^2-2\sqrt{3}X+1}+\frac{\sqrt{3}X+2}{X^2+2\sqrt{3}X+1}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{X^6+1}=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{X^2+1}+\frac{-\sqrt{3}X+2}{X^2-2\sqrt{3}X+1}+\frac{\sqrt{3}X+2}{X^2+2\sqrt{3}X+1}\right).}$$

9) Soit $F=\dfrac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$.

$$\begin{aligned}
X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2 &= (X-1)\left(X^4-2X^3+3X^2-4X+2\right)=(X-1)^2\left(X^3-X^2+2X-2\right)\\
&= (X-1)^2\left(X^2(X-1)+2(X-1)\right)=(X-1)^3\left(X^2+2\right).
\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est donc de la forme

$$F=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}+\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{z\to i\sqrt{2}}\left(z-i\sqrt{2}\right)F(z)=\frac{\left(i\sqrt{2}\right)^2+3}{\left(i\sqrt{2}-1\right)^3\left(i\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\left(2i\sqrt{2}\right)\left(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{-4+10i\sqrt{2}}\\
&= -\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}}+\frac{\overline{d}}{X+i\sqrt{2}}=-\frac{1}{108}\frac{\left(2+5i\sqrt{2}\right)\left(X+i\sqrt{2}\right)+\left(2-5i\sqrt{2}\right)\left(X-i\sqrt{2}\right)}{X^2+2}=-\frac{1}{108}\frac{4X-20}{X^2+2}=\frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}&=\frac{X^2+3}{(X-1)^3\,(X^2+2)}-\frac{-X+5}{27\,(X^2+2)}\\&=\frac{27\left(X^2+3\right)-(-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3\,(X^2+2)}=\frac{27X^2+81+(X-5)\left(X^3-3X^2+3X-1\right)}{27(X-1)^3(X^2+2)}\\&=\frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3\,(X^2+2)}=\frac{\left(X^2+2\right)\left(X^2-8X+43\right)}{27(X-1)^3(X^2+2)}=\frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3}\\&=\frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3}=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{6}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}\right).\end{aligned}$$

Finalement, la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est

$$\boxed{F=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{6}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}\right)-\frac{1}{108}\left(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}}+\frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}}\right),}$$

et la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{F=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{6}{(X-1)^2}+\frac{36}{(X-1)^3}+\frac{-X+5}{X^2+2}\right).}$$

10) Soit $F=\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned}X^5-X^4+X^3-X^2+X-1&=X^4(X-1)+X^2(X-1)+(X-1)=(X-1)\left(X^4+X^2+1\right)\\&=(X-1)\left(\left(X^4+2X^2+1\right)-X^2\right)=(X-1)\left(\left(X^2+1\right)^2-X^2\right)\\&=(X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)=(X-1)(X-j)\left(X-j^2\right)(X+j)\left(X+j^2\right).\end{aligned}$$

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}$ est de la forme

$$F=aX+b+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{X-j}+\frac{\overline{d}}{X-j^2}+\frac{e}{X+j}+\frac{\overline{e}}{X+j^2}.$$

- $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=1$, puis $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\ldots}{x^5\ldots}=1$.
- $c=\dfrac{1^6+1}{5\times1^4-4\times1^3+3\times1^2-2\times1+1}=\dfrac{2}{3}$,
- $d=\dfrac{j^6+1}{5j^4-4j^3+3j^2-2j+1}=\dfrac{2}{3j^2+3j-3}=\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$
- $e=\dfrac{(-j)^6+1}{5(-j)^4-4(-j)^3+3(-j)^2-2(-j)+1}=\dfrac{2}{3j^2+7j+5}=\dfrac{1}{2j+1}=\dfrac{2j^2+1}{3}$. Donc,

$$\boxed{\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}=X+1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{X-1}-\frac{1}{X-j}-\frac{1}{X-j^2}+\frac{2j^2+1}{X+j}+\frac{2j+1}{X-j^2}\right).}$$

11) Soit $F=\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$. La décomposition sur $\mathbb{R}$ s'obtient de la façon suivante

$$\begin{aligned}\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3} &= \frac{X^7+X^6+X^5-X^6-X^5-X^4+X^4+X^3+X^2-X^3-X^2-X+X+1}{(X^2+X+1)^3}\\ &= \frac{(X^5-X^4+X^2-X)(X^2+X+1)+X+1}{(X^2+X+1)^3} = \frac{X^5-X^4+X^2-X}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}\\ &= \frac{X^5+X^4+X^3-2X^4-2X^3-2X^2+X^3+X^2+X+2X^2+2X+2-4X-2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}\\ &= \frac{X^3-2X^2+X+2}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}\\ &= \frac{X^3+X^2+X-3X^2-3X-3+3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}\\ &= X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3} = X-3+\frac{3X+5}{X^2+X+1}-\frac{4X+2}{(X^2+X+1)^2}+\frac{X+1}{(X^2+X+1)^3}.}$$

Exercice n° 2

1) Soient $P = X^n-1$ puis $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de F sont simples (car $P = X^n-1$ et $P' = nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{C}$). De plus, $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc, $F = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}.}$$

2) Soit $P = (X-1)(X^n-1) = (X-1)^2\left(X^{n-1}+\ldots+X+1\right) = (X-1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\omega_k$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Soit $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, F admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Donc,

$$F = \frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-\omega_k}.$$

- Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_k = \frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1}-1} = \frac{1}{n(1-\omega_k^{n-1})} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}$.
- $b = \lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1}{1^{n-1}+\ldots+1^1+1} = \frac{1}{n}$.
- Il reste à calculer a.

$$F - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{n-\left(X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+X+1\right)}{n(X-1)^2(X^{n-1}+\ldots+X+1)} = \frac{-X^{n-2}-2X^{n-3}-\ldots-(n-2)X-(n-1)}{n(X-1)(X^{n-1}+\ldots+X+1)}.$$

Donc, $a = \lim_{x\to 1}(x-1)\left(F(x)-\frac{1}{n(x-1)^2}\right) = \frac{-[(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1]}{n(1+1\ldots+1)} = -\frac{n-1}{2n}$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(X-1)\left(X^n-1\right)} = \frac{1}{n}\left(-\frac{n-1}{2n(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k-1}\frac{1}{X-\omega_k}\right).}$$

3) $\dfrac{n!}{(X-1)\ldots(X-n)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X-k}$ avec

$$\lambda_k = \lim_{x\to k}(x-k)F(x) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{j\neq k}(j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k}(k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n!}{(X-1)\ldots(X-n)} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{\binom{n-1}{k-1}}{X-k}.}$$

4) Posons $P = X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1$ puis $F = \dfrac{X^2}{P}$.

$$\begin{aligned} X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1 &= \left(X^2 - e^{2ia}\right)\left(X^2 - e^{-2ia}\right) = \left(X - e^{ia}\right)\left(X - e^{-ia}\right)\left(X + e^{ia}\right)\left(X + e^{-ia}\right) \\ &= \left(X^2 - 2X\cos a + 1\right)\left(X^2 + 2X\cos a + 1\right). \end{aligned}$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq \pm e^{-ia}$ ce qui équivaut à $a \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$, puisque F est paire

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} - \frac{A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2}.$$

$B = \displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)^2F(x) = \frac{1^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ puis $x = 0$ fournit $0 = -2A + 2B$ et donc $A = B = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Si } a \in \pi\mathbb{Z},\ \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1} = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}\right).}$$

2ème cas. Si $a \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{A}{X-i} + \frac{B}{(X-i)^2} - \frac{A}{X+i} + \frac{B}{(X+i)^2}.$$

$B = \displaystyle\lim_{x\to i}(x-i)^2F(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4}$ puis $x = 0$ fournit $0 = 2iA - 2A$ et donc $A = -iB = -\dfrac{i}{4}$.

$$\boxed{\text{Si } a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},\ \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1} = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2}\right).}$$

Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$, on écrit directement

$$F = \frac{X^2+1-1}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

$$\boxed{\text{Si } a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},\ \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1} = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}.}$$

3ème cas. Si $a \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$F = \frac{A}{X - e^{ia}} + \frac{\overline{A}}{X - e^{-ia}} - \frac{A}{X + e^{ia}} - \frac{\overline{A}}{X + e^{-ia}},$$

avec

$$A = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ia} + e^{ia})(e^{ia} + e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i \sin a \cos a \; e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4\sin(2a)}.$$

Donc,

$$\boxed{\text{Si } a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z},\ \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1} = \frac{1}{4\sin(2a)}\left(-\frac{ie^{ia}}{X - e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X - e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{X + e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X + e^{-ia}}\right).}$$

Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{R}$, on regroupe les conjugués

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{4\sin(2a)}\left(\frac{-ie^{ia}\left(X - e^{-ia}\right) + ie^{-ia}\left(X - e^{ia}\right)}{\left(X - e^{ia}\right)\left(X - e^{-ia}\right)} + \frac{ie^{ia}\left(X + e^{-ia}\right) + ie^{-ia}\left(X + e^{ia}\right)}{\left(X + e^{ia}\right)\left(X + e^{-ia}\right)}\right)\\
&= \frac{1}{4\sin(2a)}\left(\frac{2X\sin(a)}{X^2 - 2X\cos(a) + 1} - \frac{2X\sin(a)}{X^2 + 2X\cos(a) + 1}\right)\\
&= \frac{1}{2\cos(a)}\left(\frac{X}{X^2 - 2X\cos(a) + 1} - \frac{X}{X^2 + 2X\cos(a) + 1}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z},\ \frac{X^2}{X^4 - 2X^2\cos(2a) + 1} = \frac{1}{2\cos(a)}\left(\frac{X}{X^2 - 2X\cos(a) + 1} - \frac{X}{X^2 + 2X\cos(a) + 1}\right).}$$

5) Le polynôme $X^{2n} + 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1}\left(X - e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)}\right)$ est à racines simples car n'a pas de racine commune dans $\mathbb{C}$ avec sa dérivée. En posant $\omega_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$, on a

$$\frac{1}{X^{2n} + 1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k},$$

où

$$\lambda_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}} = -\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{X^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}}{X - e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}}.}$$

Pour décomposer $\dfrac{1}{X^{2n} + 1}$ sur $\mathbb{R}$, on regroupe les conjugués. Pour $k \in [\![0, 2n - 1]\!]$,

$$\omega_{2n-1-k} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{(2n-1-k)\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{n} + \frac{-k\pi}{n}\right)} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)} = \overline{\omega_k}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X^{2n} + 1} &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\omega_k}{X - \omega_k} + \frac{\overline{\omega_k}}{X - \overline{\omega_k}}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k\left(X - \overline{\omega_k}\right) + \overline{\omega_k}\left(X - \omega_k\right)}{\left(X - \omega_k\right)\left(X - \overline{\omega_k}\right)}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)X + 1}{X^2 - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)X + 1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{X^{2n}+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)X+1}{X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)X+1}.}$$

Exercice n° 3

Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, posons $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Décomposons F en éléments simples (sur $\mathbb{C}$).

$$\frac{\omega X+1}{\omega^2X^2+\omega X+1}=\frac{\omega X+1}{(\omega X)^2+\omega X+1}=\frac{\omega X+1}{(\omega X-j)(\omega X-j^2)}=\frac{a}{\omega X-j}+\frac{b}{\omega X-j^2},$$

avec $a=\dfrac{\omega\times\frac{j}{\omega}+1}{\omega\times\frac{j}{\omega}-j^2}=\dfrac{j+1}{j-j^2}=-\dfrac{-j^2}{j-j^2}=\dfrac{j}{j-1}$ et de même $b=\dfrac{j^2+1}{j^2-j}=-\dfrac{1}{j-1}$. Donc,

$$\begin{aligned}F&=\frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j}{\omega_kX-j}-\frac{1}{\omega_kX-j^2}\right)=\frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_{-k}}{X-j\omega_{-k}}-\frac{\omega_{-k}}{X-j^2\omega_{-k}}\right)\\&=\frac{1}{j-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}-\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k}\right).\end{aligned}$$

Maintenant les n nombres $j\omega_k$ sont deux à deux distincts et vérifient $(j\omega_k)^n=j^n$ et donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(X-j\omega_k)=X^n-j^n.$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}$ est donc la décomposition en éléments simples d'une fraction du type $\dfrac{P}{X^n-j^n}$ avec $\deg P\leqslant n-1$. De plus, par unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{C}$, on sait que $j\omega_k=\dfrac{P(j\omega_k)}{n(j\omega_k)^{n-1}}$ et donc, $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$, $P(j\omega_k)=nj^n$. Le polynôme $P-nj^n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet les n racines deux à deux distinctes $j\omega_k$ et est donc le polynôme nul. Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{j\omega_k}{X-j\omega_k}=\frac{nj^n}{X^n-j^n}.$$

De même, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-j^2\omega_k}=\frac{nj^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}$, puis

$$F=\frac{n}{j-1}\left(\frac{j^n}{X^n-j^n}-\frac{j^{2n-2}}{X^n-j^{2n}}\right).$$

- Si $n\in 3\mathbb{N}$, posons $n=3p$ où $p\in\mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$F=\frac{3p}{j-1}\left(\frac{1}{X^{3p}-1}-\frac{j}{X^{3p}-1}\right)=\frac{3p}{1-X^{3p}}.$$

- Si $n\in 3\mathbb{N}+1$, posons $n=3p+1$ où $p\in\mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$F=\frac{3p+1}{j-1}\left(\frac{j}{X^{3p+1}-j}-\frac{1}{X^{3p+1}-j^2}\right)=\frac{(3p+1)\left(X^{3p+1}+1\right)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}.$$

- Si $n\in 3\mathbb{N}+2$, posons $n=3p+2$ où $p\in\mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$F=\frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2}-\frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right)=\frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}.$$

Exercice n° 4

Soient P et Q deux polynômes non nuls et premiers entre eux, puis soit $F=\dfrac{P}{Q}$. Si F est paire, alors $\dfrac{P(-X)}{Q(-X)}=\dfrac{P(X)}{Q(X)}$, ou encore $P(-X)Q(X)=P(X)Q(-X)$ $(*)$.

Par suite, $P(X)$ divise $P(X)Q(-X) = Q(X)P(-X)$ et $P(X)$ est premier à $Q(X)$. D'après le théorème de GAUSS, $P(X)$ divise $P(-X)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(-X) = \lambda P(X)$ (car $\deg(P(-X)) = \deg(P)$). L'analyse des coefficients dominants des deux membres fournit $\lambda = (-1)^n$ où $n = \deg P$. Ceci s'écrit $P(-X) = (-1)^n P(X)$. En reportant dans $(*)$, on obtient encore $Q(-X) = (-1)^n Q(X)$. Ainsi, si F est paire, alors P et Q sont ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs. Ce dernier cas est exclu, car alors P et Q admettraient tous deux 0 pour racine contredisant le fait qu'ils sont premiers entre eux. Finalement, si F est paire, alors P et Q sont pairs. La réciproque est claire.

$$F \text{ paire} \Leftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ sont pairs.})$$

Je vous laisse établir que

$$F \text{ impaire} \Leftrightarrow (P \text{ est impair et } Q \text{ est pair}) \text{ ou}(P \text{ est pair et } Q \text{ est impair.})$$

Exercice n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{1}{X^2+1} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{X-i} - \dfrac{1}{X+i}\right)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{X^2+1}\right)^{(n)} &= \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{X-i}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X+i}\right)^{(n)}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(X-i)^{n+1}} - \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(X+i)^{n+1}}\right) \\
&= (-1)^n n!\ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(X-i)^{n+1}}\right) = (-1)^n n!\ \mathrm{Im}\left(\frac{(X+i)^{n+1}}{(X^2+1)^{n+1}}\right) \\
&= (-1)^n n! \frac{\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} X^{2n-2k}}{(X^2+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Exercice n° 6

Si $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$, on sait que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}.$$

Si maintenant, on regroupe les pôles identiques ou encore si on pose $P = \lambda(X-z_1)^{\alpha_1}\dots(X-z_k)^{\alpha_k}$ où cette fois-ci les z_j sont deux à deux distincts. La formule ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{X - z_j} \quad (*).$$

Déterminons alors les polynômes divisibles par leur dérivée. Soit P un tel polynôme. Nécessairement $\deg P \geqslant 1$ puis, il existe deux complexes a et b, $a \neq 0$ tel que $P = (aX + b)P'$ ou encore $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{1}{aX+b}$. $(*)$ montre que P a une et une seule racine. Par suite, P est de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \neq 0$, $n \geqslant 1$ et a quelconque.

Réciproquement, on a dans ce cas $P = \dfrac{1}{n}(X-a) \times n(X-a)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{n}X - \dfrac{a}{n}\right)P'$ et P' divise effectivement P.

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X-a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

Exercice n° 7

1)

$$\begin{aligned}
X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 &= X^2\left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 3\right) = X^2\left(\left(X + \frac{1}{X}\right)^2 + 2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 1\right) \\
&= X^2\left(X + \frac{1}{X} + 1\right)^2 = \left(X^2 + X + 1\right)^2 = (X-j)^2\left(X - j^2\right)^2.
\end{aligned}$$

2) Soit $P = X^6 - 5X^5 + 5X^4 - 5X^2 + 5X - 1$. 1 et -1 sont racines de P. On écrit donc $P = (X^2-1)(X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1)$ puis

$$X^4-5X^3+6X^2-5X+1 = X^2\left(\left(X^2+\frac{1}{X^2}\right)-5\left(X+\frac{1}{X}\right)+6\right) = X^2\left(\left(X+\frac{1}{X}\right)^2-5\left(X+\frac{1}{X}\right)+4\right)$$
$$= X^2\left(X+\frac{1}{X}-1\right)\left(X+\frac{1}{X}-4\right) = \left(X^2-X+1\right)\left(X^2-4X+1\right)$$

et donc, $P=(X-1)(X+1)\left(X+j\right)\left(X+j^2\right)\left(X-2+\sqrt{3}\right)\left(X-2-\sqrt{3}\right)$.

3)

$$\begin{aligned}P &= X^7-X^6-7X^5+7X^4+7X^3-7X^2-X+1=\left(X^2-1\right)\left(X^5-X^4-6X^3+6X^2+X-1\right)\\ &= (X-1)^2(X+1)\left(X^4-6X^2+1\right)\\ &= (X-1)^2(X+1)\left(X^2-\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)\left(X^2-\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont 1 (d'ordre 2), -1, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$,$-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 7

Pour chacun des 8 numérateurs possibles, il y a $\binom{7}{2}=21$ dénominateurs et donc au total, $8\times 21=168$ termes.

$$\sum\frac{x_1}{x_2x_3}=\sum\frac{x_1^2x_4x_5x_6x_7x_8}{x_1x_2\ldots x_8}=\frac{1}{\sigma_8}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6=\frac{1}{3}\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Ensuite,

$$\sigma_1\sigma_6=\left(\sum x_1\right)\left(\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6\right)=\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6+\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7,$$

et donc,

$$\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6=\sigma_1\sigma_6-\sigma_7=(-1)\times 0-1=-1.$$

Donc, $\displaystyle\sum\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{1}{3}$.

